SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 TRUNG HỌC PHỔ THÔNG
NĂM HỌC: 2014-2015
Môn Thi : TOÁN CHUYÊN
Ngày thi: 22-6- 2014
Thời gian làm bài : 150 phút

Câu 1: (2 điểm)

a) Giải phương trình: $x\sqrt{2x-3}=3x-4$

b) Cho ba số thực x, y, z thỏa điều kiện $x+y+z=0$; $xyz\neq 0$

Tính giá trị của biểu thức $P=\dfrac{x^2}{y^2+z^2-x^2}+\dfrac{y^2}{z^2+x^2-y^2}+\dfrac{z^2}{x^2+y^2-z^2}$

Câu 2: (1.5 điểm)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y+\dfrac{1}{y}=\dfrac{9}{x} \\ x+y-\dfrac{4}{x}=\dfrac{4y}{x^2} \end{cases}$

Câu 3: (1.5 điểm)

Cho tam giác ABC đều và M là điểm bất kỳ trên cạnh BC. Gọi D, E lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên AB và AC. Xác định vị trí của M để tam giác MDE có chu vi nhỏ nhất.

Câu 4: (2 điểm)

a) Cho x, y là hai số thực khác 0. Chứng minh rằng : $\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}\geq\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$

b) Cho a, b là hai số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{a^2+3ab+b^2}{\sqrt{ab}\left(a+b\right)}$

Câu 5: (2 điểm)

Từ một điểm M ở ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến MA, MB với (O) (A, B là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của AB và OM; I là trung điểm của MH. Đường thẳng AI cắt (O) tại điểm K (K khác A)

a) Chứng minh HK vuông góc AI.

b) Tính số đo góc $\widehat{MKB}$.

Câu 6 (1điểm)

Tìm cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn phương trình: $2015\left(x^2+y^2\right)-2014\left(2xy+1\right)=25$

HẾT

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Bài 1:

a) $x\sqrt{2x-3}=3x-4$

Điều kiện: $x \ge \frac{3}{2}$

Với điều kiện trên, phương trình trở thành:

$$x^2(2x-3)=(3x-4)^2 \Leftrightarrow 2x^3-3x^2=9x^2-24x+16$$

$$\Leftrightarrow 2x^3-12x^2+24x-16=0 \Leftrightarrow x^3-6x^2+12x-8=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^3=0 \Leftrightarrow x=2\,(\text{nhận})$$

Vậy $S=\{2\}$.

b) Cho ba số thực x, y, z thỏa điều kiện $x+y+z=0;\ xyz\neq 0$

Tính giá trị của biểu thức $P=\dfrac{x^2}{y^2+z^2-x^2}+\dfrac{y^2}{z^2+x^2-y^2}+\dfrac{z^2}{x^2+y^2-z^2}$

Ta có: $x+y+z=0 \Rightarrow y+z=-x \Rightarrow (y+z)^2=(-x)^2$

$\Rightarrow y^2+2yz+z^2=x^2 \Rightarrow y^2+z^2-x^2=-2yz$

Chứng minh tương tự : $z^2+x^2-y^2=-2zx;\ x^2+y^2-z^2=-2xy$

$$P=\frac{x^2}{y^2+z^2-x^2}+\frac{y^2}{z^2+x^2-y^2}+\frac{z^2}{x^2+y^2-z^2}$$

$$=\frac{x^2}{-2yz}+\frac{y^2}{-2zx}+\frac{z^2}{-2xy}=\frac{-x^2-y^3-z^3}{2xyz}=\frac{-(x^3+y^3+z^3-3xyz)-3xyz}{2xyz}=\frac{-3xyz}{2xyz}=\frac{-3}{2}$$

(Áp dụng bài toán phụ: $x+y+z=0 \Rightarrow x^3+y^3+z^3-3xyz=0$)

Bài 2:

$$\begin{cases} x+y+\dfrac{1}{y}=\dfrac{9}{x} \\ x+y-\dfrac{4}{x}=\dfrac{4y}{x^2} \end{cases} \qquad \text{ĐK}: x\neq 0;\ y\neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{y}+\dfrac{4}{x}=\dfrac{9}{x}-\dfrac{4y}{x^2} \\ x+y+\dfrac{1}{y}=\dfrac{9}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4y}{x^2}-\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{y}=0 \\ x+y+\dfrac{1}{y}=\dfrac{9}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4y}{x^2}-\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=0 \\ x+y+\dfrac{1}{y}=\dfrac{9}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{x}\left(\dfrac{y}{x}-1\right)+\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}\right)=0 \\ x+y+\dfrac{1}{y}=\dfrac{9}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{x}\left(\dfrac{y-x}{x}\right)+\left(\dfrac{x-y}{xy}\right)=0 \\ x+y+\dfrac{1}{y}=\dfrac{9}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)\left(\dfrac{1}{xy}-\dfrac{4}{x^2}\right)=0 \\ x+y+\dfrac{1}{y}=\dfrac{9}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)\left(\dfrac{x-4y}{x^2y}\right)=0 \\ x+y+\dfrac{1}{y}=\dfrac{9}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=y \\ x=4y \end{array}\right. \\ x+y+\dfrac{1}{y}=\dfrac{9}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=y \\ x+y+\dfrac{1}{y}=\dfrac{9}{x} \end{cases} \\ \begin{cases} x=4y \\ x+y+\dfrac{1}{y}=\dfrac{9}{x} \end{cases} \end{array}\right.$$

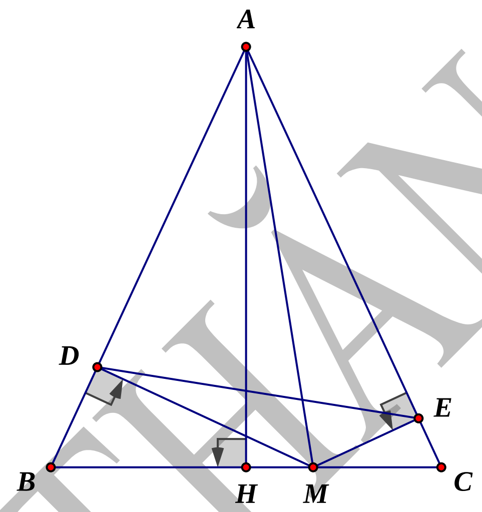
$$\text{TH1}: \begin{cases} x=y \\ x+y+\dfrac{1}{y}=\dfrac{9}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x+x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{9}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ 2x^2-8=0 \end{cases} \begin{cases} x=y \\ x=\pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=\pm 2$$

$$\text{TH2}: \begin{cases} x=4y \\ x+y+\dfrac{1}{y}=\dfrac{9}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4y \\ 4y+y+\dfrac{1}{y}=\dfrac{9}{4y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4y \\ 5y+\dfrac{1}{y}-\dfrac{9}{4y}=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4y \\ 2y^2-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4y \\ y^2=\dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 2 \\ y=\pm\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(x;y)=(2;2),(-2;-2),\left(2;\frac{1}{2}\right),\left(-2;-\frac{1}{2}\right)$

<u>Bài 3:</u>



Xác định vị trí của M để ΔMDE có chu vi nhỏ nhất

Dễ thấy tứ giác ADME nội tiếp đường tròn đường kính AM $\Rightarrow$ ΔADE nội tiếp đường tròn đường kính AM $\Rightarrow DE = AM.\sin BAC$ (định lý hàm sin)

$$\Rightarrow DE = AM.\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}AM.$$

Mặt khác: $\begin{cases} DM = BM.\sin ABC = BM.\sin 60^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}BM \\ ME = MC.\sin ACB = MC.\sin 60^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}MC \end{cases}$

Gọi H là hình chiếu của A lên BC $\Rightarrow$ H cố định $\Rightarrow$ AH không đổi

Chu vi $\Delta ADE = MD + ME + DE = \dfrac{\sqrt{3}}{2}BM + \dfrac{\sqrt{3}}{2}CM + \dfrac{\sqrt{3}}{2}AM$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(BM + MC + AM\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(BC + AM\right) \ge \frac{\sqrt{3}}{2}\left(BC + AH\right) \text{ không đổi}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv H \Leftrightarrow$ **M là hình chiếu của A lên BC.**

<u>Bài 4:</u>

a) $\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^2} \ge \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \qquad \left(x \ne 0;\ y \ne 0\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - \frac{x}{y} - \frac{y}{x} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{x^4 + y^4 - x^3y - xy^3}{x^2y^2} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x-y\right)\left(x^3 - y^3\right)}{x^2y^2} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{\left(x-y\right)^2\left(x^2 + xy + y^2\right)}{x^2y^2} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x-y\right)^2\left[\left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2\right]}{x^2y^2} \ge 0 \text{ (luôn đúng, } \forall x \ne 0;\ y \ne 0)$$

b) **Tìm Min** $P = \dfrac{a^2 + 3ab + b^2}{\sqrt{ab}\left(a+b\right)} \qquad (a > 0; b > 0)$

$$P = \frac{a^2 + 3ab + b^2}{\sqrt{ab}\left(a+b\right)} = \frac{\left(a+b\right)^2 + ab}{\sqrt{ab}\left(a+b\right)} = \frac{\frac{1}{4}\left(a+b\right)^2 + ab + \frac{3}{4}\left(a+b\right)^2}{\sqrt{ab}\left(a+b\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\left(a+b\right)^2 + ab}{\sqrt{ab}\left(a+b\right)} + \frac{\frac{3}{4}\left(a+b\right)}{\sqrt{ab}} \ge \frac{2\sqrt{\frac{1}{4}\left(a+b\right)^2.ab}}{\sqrt{ab}\left(a+b\right)} + \frac{\frac{3}{4}.2\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}} = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

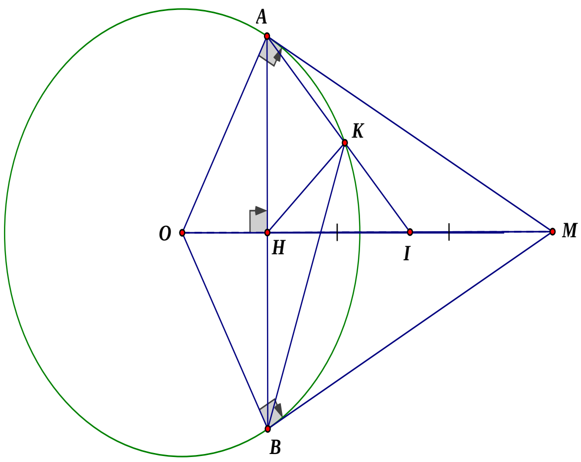
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}\left(a+b\right)^2 = ab \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow a = b$

Vậy Min $P = \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow a = b.$

*** Cách làm khác:**

$$P = \frac{a^2 + 3ab + b^2}{\sqrt{ab}\left(a+b\right)} = \frac{\left(a+b\right)^2 + ab}{\sqrt{ab}\left(a+b\right)} = \frac{a+b}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b} = \frac{3}{4}\frac{a+b}{\sqrt{ab}} + \left(\frac{1}{4}.\frac{a+b}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b}\right) \ge \frac{3}{4}.2 + 2.\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{5}{2}$$

<u>Bài 5:</u>



a) **Chứng minh $HK \perp AI$**

Dễ thấy OM là trung trực của AB $\Rightarrow$ OM $\perp$ AB tại H.

Áp dụng phương tích của điểm I với (O) ta được: $IK.IA = IO^2 - R^2 \left(R: \text{bán kính}(O)\right)$

Mà: $IH^2 = \left(IO - OH\right)^2 = IO^2 - 2IO.OH + OH^2$

$$= IO^2 - OH\left(2.IO - OH\right) = IO^2 - OH\left(2IH + 2OH - OH\right)$$

$$= IO^2 - OH\left(2.IH + OH\right) = IO^2 - OH\left(HM + OH\right)$$

$$= IO^2 - OH.OM = IO^2 - R^2.$$

Nên: $IH^2 = IK.IA \Rightarrow \dfrac{IH}{IK} = \dfrac{IA}{IH}$; $\hat{I}$ **chung** $\Rightarrow \Delta IHA \backsim \Delta IKH(c.g.c)$

$\Rightarrow IKH = IHA = 90^0 \Rightarrow HK \perp AI$ **tại K.**

a) **Tính MKB**

Ta có: $IM^2 = IH^2 = IK.IA$; $\hat{I}$ **chung** $\Rightarrow \Delta IMK \backsim \Delta IAM(c.g.c)$

$\Rightarrow IMK = IAM = HBK \Rightarrow$ **tứ giác HBMK nội tiếp** $\Rightarrow MKB = MHB = 90^0$

Bài 6: $2015\left(x^2 + y^2\right) - 2014\left(2xy + 1\right) = 25 \quad (1)$

$\Leftrightarrow 2014\left(x - y\right)^2 + x^2 + y^2 = 2014 + 25$

Nếu $\left(x-y\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y$ **thì pt(1)** $\Leftrightarrow 2x^2 = 2039$ **(2) Ta có:** $2x^2 \vdots 2$; $2039 \not\vdots 2 \Rightarrow$ **pt(2) vô nghiệm**

Nếu $\left(x-y\right)^2 \geq 2$ **thì** $VT(1) \geq 2014.2 + x^2 + y^2 \geq 2014.2 = 4028 > 2039 = VP(1)$

Do đó $\left(x-y\right)^2 = 1 \overset{(1)}{\Rightarrow} x^2 + y^2 = 25$

Ta có hệ: $\begin{cases}\left(x-y\right)^2 = 1\\ x^2+y^2 = 25\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x - y = \pm 1\\ x^2 + y^2 = 25\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x = y+1\\ x = y-1\end{array}\right.\\ x^2+y^2 = 25\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x = y+1\\ x^2+y^2=25\end{cases}\\ \begin{cases}x = y-1\\ x^2+y^2 = 25\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow ..... \Leftrightarrow$

Vậy cặp nghiệm nguyên của phương trình là: $\left(x;y\right) = \left(3;4\right), \left(4;3\right), \left(-3;-4\right), \left(-4;-3\right)$.